

6. Feladatsor

1. Bizonyítsa be, hogy minden pozitív egész n -re

$$x^2 + xy + y^2 = 7^n$$

megoldható az egész számok között. (Dorin Andrica)

2. Bizonyítsa be, hogy $n \geq 6$ -ra az

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

megoldható az egész számok között.

3. Tegyük fel, hogy p prím és az a, b, c egész számokra fennáll a

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4$$

összefüggések. Bizonyítsa be, hogy $p \mid a, b, c$. (Baltic way 2009/7).

4. Határozza meg az összes nem üres S pozitív egészekből álló véges halmazt, amelyre minden $i, j \in S$ esetén (ahol i és j azonos is lehet)

$$\frac{i+j}{(i,j)} \in S$$

is teljesül. (APMO 2004)

5. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 1$ -re létezik pozitív egész a , amelyre $a, 2a, 3a, \dots, na$ mind teljes hatványok.