$\mathrm{Li}(x)$ közelítése $x/\log x$-szel

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}.$$

Parciális integrálással próbáljuk kiszámolni.

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g.$$

Mi legyen f és g?

$$f(u) = \frac{1}{\log u} \qquad g(u) = u.$$

Ekkor

$$\int \frac{1}{\log u} du = \frac{u}{\log u} - \int \left(\frac{1}{\log u}\right)' u\, du$$

$$\left(\frac{1}{\log u}\right)' = ((\log u)^{-1})' = -\frac{1}{(\log u)^2} \cdot \frac{1}{u}$$

$$\int_2^x \frac{1}{\log u} du = \left.\frac{u}{\log u}\right]_2^x + \int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} - \frac{2}{(\log 2)}.$$

Ott tartottunk

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} - \frac{2}{\log 2}.$$

De mi legyen $\int_2^x \frac{du}{(\log u)^2}$-tel?

Parciális integrálás megint:

$$\int f \cdot g' = fg - \int f' \cdot g,$$

ahol

$$f(u)=\frac{1}{(\log u)^2}\qquad g(u)=u.$$

Ekkor

$$\int_2^x \frac{du}{(\log u)^2}=\frac{u}{(\log u)^2}\Big]_2^x-\int\left(\frac{1}{(\log u)^2}\right)' u\,du$$

$$=\frac{x}{(\log x)^2}-\frac{2}{(\log 2)^2}+2\cdot\int_2^x\frac{1}{(\log u)^3}du,$$

így

$$\mathrm{Li}(x)=\frac{x}{\log x}+\frac{x}{(\log x)^2}+2\cdot\int_2^x\frac{1}{(\log u)^3}du$$
$$-\frac{2}{\log 2}-\frac{2}{(\log 2)^2}.$$