Óramenet - Számelmélet 2

1. hét, február 12: Az előadás hétfő 16:00-kor kezdődik. Az első előadáson a jegyzetből az „1. Pár szó a Riemann sejtésről” fejezetet vettük. Az óra végén megnéztük a „ Visualizing the Riemann zeta function and analytic continuation” videót. A videók tartalma nem része a vizsgaanyagnak. Az előadáshoz tartozik gyakorlat is (amely a csoport egyrészének nem kötelező, a másiknak igen, de mindenkit szívesen látok). A gyakorlatok időpontja: csütörtök 14-15 illetve 15-16 a D-0-222 teremben.

2. hét, február 19: A jegyzetből a 2. és 3. fejezet első részét vettük. Így kimondtuk az általános Dirichlet tételt, és bebizonyítottunk pár speciális esetet (végtelen sok $4k-1$, $4k+1$ és $ak+1$ alakú prím létezik). Kimondtunk pár prímekre vonatkozó sejtést (Goldbach, végtelen sok ikerprím létezik). Elkezdtük $d_n = p_{n+1} - p_n$ becslését, ahol is a 3.2. Tételig jutottunk. A gyakorlaton megbeszéltük az 1. feladatsor/1,2,3,4 feladatokat (rövidítve: 1./1,2.3,4 feladatokat).

3. hét, február 26: A jegyzetből a 4. fejezetet vettük majdnem végig, így alsó-felső becsléseket adtunk Sidon halmazokra. Bebizonyítottuk az elemi felső becsléseket ($2\sqrt{N}$ és $\sqrt{2N}+0.5$), a javításokat ($\sqrt{N}+\sqrt[4]{N}+1$ és $\sqrt{N}+0.998\sqrt[4]{N}$) csak bizonyítás nélkül említettük. Alsó becslésként vettük a mohó algoritmust $2N^{1/3}$ és egy moduláris konstrukciót $\mathbb{Z}_{p^2}$-ben. Jövő héten a 4.6. Tétel bizonyításával folytatjuk. A gyakorlaton megbeszéltük az 1./5 és a 2./1,3,4 feladatokat.

4. hét, március 4: Befejeztük a Sidon halmazokról szóló 4. fejezetet, valamint a Fermat-sejtésről szóló 5. fejezetet. Megnéztük a „ Intro proof Fermat's Last Theorem” videót. A gyakorlaton megbeszéltük a 2/2,5 és 3/1,2 feladatokat.

5. hét, március 11: A jegyzetből a „6. Két-négyzetszám probléma”, „7. Gauss-prímek” és „8. Algebrai Számelmélet” elejét (76.- 78. oldal) vettük. A gyakorlaton megbeszéltük a 3/3,5 feladatokat. A 3/4 feladathoz segítséget adtam: Ábel átrendezés.

6. hét, március 18: Folytattuk az „8. Algebrai Számelmélet” fejezetet. Szó volt Eukleideszi gyűrűkről. $x^2+2y^2=n$, $x^2+3y^2=n$ egyenletek megoldhatóságáról. Bebizonyítottuk, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$-ben és $\mathbb{Z}[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]$-ben (ezutóbbi az Euler egészek gyűrűje) van maradékos osztás, és így prímek és felbonthatatlanok azonosak, igaz bennük a számelmélet alaptétele. A 8.11 Tételig jutottunk, ahol megadtuk az Euler prímeket. A gyakorlaton megbeszéltük a 3/4, 4/1,2,3,4 feladatokat.

7. hét, március 25: Folytattuk az „8. Algebrai Számelmélet" fejezetet, azaz meghatároztuk az Euler-praímeket, és ismertettük Euler által megadott lemma bizonyítását, amelyet a Fermat-sejtés $n = 3$ esetének bizonyításához használt. Bebizonyítottuk, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$-ben nem igaz a számelmélet alaptétele. Utána ismertettük Euler bizonyítását a Fermat-sejtésre az $n = 3$ esetben (9. fejezet) és tanulmányoztuk a három négyzetszám problémát (10. fejezet). Levezettük a négy-négyzetszám tételt a 3 négyzetszám problémá-ból. Az előadás utáni gyakorlaton (a tavaszi szünet után) megbeszéltük a 4/5, 5/1,2,3,4 feladatokat.

8. hét, április 8: Bebizonyítottuk a négy négyzetszám-tételt a 11. fejezetben. Akit érdekel otthon egy másik bizonyítást is megnézhet a két-négyzetszám tételre (szélmalmokkal) a „Fermat's two square theorem" videóban, de ez nem vizsgaanyag. A gyakorlaton kiosztottam a 6. feladatsort és megbeszéltük az 5/5 és 6/1 feladatokat.

9. hét, április 15: A 12. és 13. fejezeteket vettük (Waring probléma és Pell egyenletek). Az óra végén Dario Alpern által írt webes alkalmazásokat nézegettük (pl. Pell-egyenletek megoldása, Gauss egészek faktorizációja, polinomok faktorizációja, négy négyzetszám összegeként való felírás s.i.t.). A gyakorlaton megbeszéltük a 6. feladatsor feladatait.

10. hét, április 22: A 14. és 15. fejezetet vettük (Diofantikus approximáció és algebra számok nem approximálhatóak túl jól). Ez utóbbi fejezet keretében szó volt Liouville tételéről (bizonyítással) és általánosításairól (Thue-tétel és Roth tétel). A gyakorlat megbeszéltük a 7. feladatsor feladatait.

11. hét, április 29: A 16., 17. és 18. fejezeteket vettük (Thue-egyenletek, Geometriai számelmélet, exponenciális összegek). Időhiányában a következő fejezetbe már nem kezdtünk bele, hanem az óra utolsó 5 percében két feladaton lehetet gondolkozni: 1) Határozzuk meg $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját 2) Adjunk elemi becslést a legkisebb kvadratikus nem-maradékra mod p. A gyakorlaton zh-t írtunk.

12. hét, május 6: A 20. és 21. fejezeteket vettük (Lefedőrendszerek és Prímszámelmélet). Ez utóbbi fejezetben Mertens 3 tételét igazoltuk.

13. hét, május 13: Az utolsó fejezet (Transzcendens számok) volt az előadáson. Bizonyítás nélkül kimondtuk Lindemann-Weierstrass tételt, a Baker féle átfogalmazást és Gelfond-Schneider tételt. A gyakorlaton megbeszéltük a zh feladatait és a 8. feladatsorról a 2. és 3 feladatokat. **A vizsgán nem kell tudni a Sidon sorozatokra vonatkozó moduláris konstrukciókat, de a mohó algoritmust igen.**