1. Feladatsor

1. Jelölje $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$ a prímek növekvő sorozatát. A prímszámtételből vezessük le, hogy az n-edik prímre:

$$p_n \sim n \log n.$$

2. Az Euler-szorzatból bizonyítsuk be, hogy $\sum \frac{1}{p}$ divergens.

3. Legyen $F(s)$ és $G(s)$ két Dirichlet-sor:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$
$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

   Bizonyítsuk be, hogy ott ahol mindkét sor abszolút konvergens, ott

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

   ahol $h = f * g$ az f és g függvények Dirichlet konvoluciója, azaz

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

4. Az előző feladatból vezessük le, hogy

   a) $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$

   b) $\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^s}$

   c) $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^s}$

5. Találjuk meg az összed n pozitív egészet, amelyre

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\le n \\ p,q \text{ prímek}}} (p+q).$$

   (IMO SL 2022 N2)