3. Feladatsor

1. Jelölje az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ (ha $n \geq 2$) rekurzióval megadott sorozat a Fibonacci számokat. Mely n, m természetes számokra lesz $\{F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, \ldots, F_m\}$ Sidon halmaz?

2. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ olyan halmaz, hogy bármely 3 elemének az összege különböző (ezek az ún. B_3 sorozatok). Adjon minél élesebb felső becslést $|\mathcal{A}|$ elemszámára, illetve konstruáljon minél nagyobb $\mathcal{A}$ halmazt a fenti tulajdonsággal.

3. Legyen az m összetett szám két különböző prím szorzata: $m = pq$. Berci azt állítja konstruált olyan $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}_m$ halmazt, amelyre $\mathcal{A}$ modulo p és modulo q is Sidon halmaz, és $\mathcal{A}$ mérete $[\sqrt{m}]$. Igazoljuk, hogy Berci tévedett. Mondjon minél erősebb felső becslést a Berci által definiált $\mathcal{A}$ halmaz méretére.

4. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ egy végtelen Sidon halmaz. Igazolja, hogy $\mathcal{A}$ elemeinek reciprokösszege konvergens.

5. Igazolja, hogy létezik olyan $\mathcal{A} \subseteq \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{N}\}$ Sidon halmaz (azaz $\mathcal{A}$ elemei most a megszokottól eltérően nem feltétlen egészek), amelynek elemszámára $|\mathcal{A}| \geq N/2$.