7. Feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok természetes szám nem áll elő három köbszám összegeként.

2. Jelölje $G(k)$ a Waring számot, azaz azt a legkisebb G pozitív egészt, amelyre minden elegendően nagy természetes szám előáll G darab k-adik hatvány összegeként. Bizonyítsa be, hogyha p prím, akkor $G(p-1) \geq p$. (Az előadáson csak annyit bizonyítottunk, hogy minden k-ra $G(k) \geq k$.)

3. Jelölje $E(k)$ az előjeles Waring számot, azaz azt a legkisebb E pozitív egészt, amelyre minden elegendően nagy természetes szám előáll

$$\pm a_1^k \pm a_2^k \pm a_3^k \pm \cdots \pm a_E^k$$

alakban, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_E$ egész számok. Adjon minél élesebb alsó és felső becslést $E(k)$-ra.

4. Legyen D olyan pozitív egész, amely nem négyzetszám. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$-ben végtelen sok egység van. Van-e ezeknek az egységeknek explicit alakja?

5. Adjuk meg a legnagyobb pozitív egész n-et, amelyre n két köbszám különbsége és $2n + 79$ négyzetszám. *(2008 AIME II Problem 15)*